SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

M. MIRANDA

CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

4, 11, 25 FEBBRAIO 1982

CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

Intendo parlare delle soluzioni deboli ottenibili col metodo diretto del CdV (Calcolo delle Variazioni) e della loro regolarizzazione, nella quale svolge un ruolo fondamentale la TGdM (Teoria Geometrica della Misura).

Il protagonista della prima parte di questo programma è l'integrale

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(Du(x))dx \quad ,$$

dove Ω è un aperto limitato di R^n , $F : R^n \to R$ è data e supposta convessa non negativa, $u : \Omega \to R$ è da intendersi variabile.

Con D indichiamo l'operatore gradiente, cioé

$$Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) , \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) , \ldots , \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) .$$

Deve essere noto da almeno due secoli e mezzo, essendovi associato il nome di Eulero, il fatto che una funzione u regolare e minimizzante $\mathcal{F}$, sia pure sotto certe restrizioni, deve soddisfare l'equazione

$$(1) \qquad \operatorname{div} \{ DF(Du(x)) \} = 0 \quad , \quad \forall\, x \in \Omega \ .$$

E' però dovuta a Gauss, e non più vecchia di 150 anni, l'osservazione che la ricerca diretta del minimo di $\mathcal{F}$ è un modo per risolvere l'equazione

(1). Fino a Gauss il legame fra il minimo di $\mathcal{F}$ e la soluzione dell'equazione era stato utilizzato soltanto nella direzione opposta.

Oggi è quasi ozioso sottolineare la naturalezza del problema del minimo per un integrale come $\mathcal{F}$, cioè del minimo di una funzione reale sia pure di argomento funzionale. Tale problema si riduce a: data una successione di valori possibili $\{\mathcal{F}(u_j)\}$ tendente all' inf di tutti i valori possibili, dimostrare l'esistenza di un valore possibile per la variabile u tale che

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j) \quad . \tag{2}$$

Per risolvere tale problema è utile conoscere una condizione sufficiente perchè valga la (2), come è ad esempio:

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA SEMICONTINUITA' INFERIORE

Se i gradienti delle u_j e u sono integrabili su Ω e se vale

$$\lim_{j\to\infty} \int_Q Du_j(x)dx = \int_Q Du(x)dx \quad , \text{ per ogni cubo } Q \subset\!\!\!/ \; \Omega \text{ , allora} \tag{3}$$

vale (2).

DIMOSTRAZIONE. Poichè F può essere vista come limite di una successione crescente di $\{F_\lambda\}$, tutte convesse positive ed aventi ciascuna gradiente limitato, possiamo assumere quest'ultimo fatto per la F stessa ai fini della nostra dimostrazione. Avremo allora che

$$\int_{\Omega} F(Du(x))dx = \sup_{\{Q_k\}} \sum_k F(⨍_{Q_k} Du(x)dx) \operatorname{mis} Q_k$$

dove $\{Q_k\}$ è una qualunque famiglia finita di cubi di Ω, a due a due privi di punti interni in comune, e dove $⨍_{Q_k} \cdot dx$ sta per $(\int_{Q_k} \cdot dx)(\operatorname{mis} Q_k)^{-1}$.

Si tratta allora di confrontare $\sum_k F(⨍_{Q_k} Du(x)dx) \cdot \operatorname{mis} Q_k$ con le $\sum_k \int_{Q_k} F(Du_j(x))dx$, per i diversi valori di j.

Per la convessità di F abbiamo:

$$F(Du_j(x)) \geq F(⨍_{Q_k} Du(x)dx) + DF(⨍_{Q_k} Du(x)dx) \cdot (Du_j(x) - ⨍_{Q_k} Du(x)dx) ,$$

e ciò qualunque siano x, k e j. Integrando allora su Q_k e sommando rispetto a k ricaviamo

$$\sum_k \int_{Q_k} F(Du_j(x))dx \geq \sum_k (\operatorname{mis} Q_k) F(⨍_{Q_k} Du(x)dx) +$$

$$+ \sum_k DF(⨍_{Q_k} Du(x)dx) \cdot (\int_{Q_k} Du_j(x)dx - \int_{Q_k} Du(x)dx) .$$

Da questa e da (3) segue facilmente la tesi.

Possiamo senz'altro dare un facile e al tempo stesso fondamentale

TEOREMA DI ESISTENZA DEL MINIMO PER $\mathcal{F}$.

Se U è una famiglia di funzioni equilimitate insieme con i loro rapporti incrementali e chiusa rispetto alla convergenza uniforme allora

esiste il minimo di $\mathcal{F}$ su U .

Il difetto grave delle funzioni minimizzanti offerte da questo teorema, ai fini della loro aspirazione a risolvere l'equazione (1) è che esse possono appartenere al "bordo" di U . Più precisamente se fra le condizioni per l'appartenenza ad U c'è il fatto che i rapporti incrementali debbano essere limitati da una costante K , non può escludersi in generale che la funzione minimizzante u abbia questo valore K come estremo dei suoi rapporti incrementali. Ciò verificandosi non è possibile fare sulla u tutte quelle operazioni che permettono di arrivare alla (1).

Questa difficoltà è superabile nei casi in cui i dati siano tali che la soluzione attesa deve avere rapporti incrementali limitati in modo prevedibile. In questo caso se la limitazione imposta ai rapporti incrementali delle funzioni di U è più larga non potrà presentarsi l'impasse che si è detto.

Nel caso in cui la famiglia U sia di funzioni alle quali venga richiesto, fra l'altro, di avere assegnati valori ϕ su $\partial\Omega$, è risolvente la seguente:

CONDIZIONE GEOMETRICA. Esiste una costante M e per ogni $x \in \partial\Omega$ due vettori $a,b \in R^n$ con $|a| \leq M$, $|b| \leq M$, tali che

$$(4) \qquad a\cdot(y-x) \leq \phi(y)-\phi(x) \leq b\cdot(y-x) \quad , \quad \forall\, y \in \partial\Omega \ .$$

Può infatti stabilirsi il seguente

SECONDO TEOREMA DI ESISTENZA DEL MINIMO PER $\mathcal{F}$.

Se F è strettamente convessa e Ω, ϕ verificano la condizione geometrica, allora esiste un'unica u minimizzante $\mathcal{F}$ in U, dove U è l'insieme di tutte le funzioni lipschitziane aventi i valori ϕ su $\partial\Omega$.

Resta a questo punto da vedere se u risolve (1) o meno. Ciò è facile da verificarsi nel caso speciale $F(Du) = |Du|^2$. Dalla proprietà di minimo avendosi

$$\int_\Omega DF(Du)D\psi \, dx = 0 \,, \quad \forall \psi \text{ lipschitziana e nulla su } \partial\Omega .$$

Scegliendo $\psi(x) = |x-y|^2/2n - \rho^2/2n$ per $|x-y| < \rho$, per $y \in \Omega$ e $\rho \le \mathrm{dist}(y, \partial\Omega)$ e appunto $F(Du) = |Du|^2$, ricaviamo

$$\int_{B_\rho(y)} Du\, D\psi dx = 0 \Rightarrow \int_{B_\rho(y)} u\Delta\psi \, dx = \int_{\partial B_\rho(y)} u\, D\psi \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \, dH_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{B_\rho(y)} u \, dx = \frac{\rho}{n} \int_{\partial B_\rho(y)} u \, dH_{n-1} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \fint_{B_\rho(y)} u \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y) = \fint_{B_\rho(y)} u(x) dx \Rightarrow u \text{ è armonica!}$$

Sempre restando nel caso particolare dell'equazione di Laplace la restrizione imposta dalla condizione geometrica è allentata dalle seguenti considerazioni:

a) la condizione geometrica è verificabile con calcolo elementare se Ω è una sfera e ϕ è un polinomio

b) la risolubilità del problema con dato polinomiale implica, attraverso il teorema di Weierstrass e il principio del massimo, la risolubilità con un qualunque dato continuo

c) il metodo del "balayage" permette di usare la risolubilità del problema sulla sfera per attaccare il problema su un aperto qualsiasi.

Tutto ciò è, come ripeto, vero nel caso particolare dell'integrale dell'energia. In generale la funzione offerta dal secondo teorema di esistenza e che nasce lipschitziana, aspetta di essere rivelata come più regolare. E questo passo è, in generale, nient'affatto banale.

REGOLARIZZAZIONE

Ritorniamo alla equazione integrale di cui sono soluzione i minimi di $\mathcal{F}$, cioè

$$\int_\Omega DF(Du(x))D\psi(x)\,dx = 0 \quad . \tag{5}$$

Se ψ è nulla al di fuori di un compatto di Ω, allora per valori sufficientemente piccoli di $s \in R$ e per ogni vettore unitario $\alpha \in R^n$ avremo che anche $\psi(x-s\alpha)$ si annulla su $\partial\Omega$, per cui dalla (5) segue

$$\int_\Omega DF(Du(x))\left[D\psi(x-s\alpha) - D\psi(x)\right]dx = 0$$

e quindi anche

$$\int_\Omega \left[DF(Du(x+s\alpha)) - DF(Du(x))\right]\cdot D\psi(x)\,dx = 0 \quad .$$

Da questa, supponendo $F \in C^2$, si ha

$$0 = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 D_i D_j F\left(Du(x)+t\left[Du(x+s\alpha)-Du(x)\right]\right)dt\ D_i\left[u(x+s\alpha)-u(x)\right] D_j\psi(x)dx$$

In altre parole, i rapporti incrementali $v(x) = \dfrac{u(x+s\alpha) - u(x)}{s}$ soddisfano un'equazione integrale del seguente tipo

$$0 = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i v\, D_j\psi\, dx \quad , \tag{6}$$

dove, per la convessità di F e la limitatezza di $|Du(x)|$, possiamo supporre

$$\tau_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \tau_2|\xi|^2 \ , \quad 0<\tau_1\leq\tau_2<+\infty \ , \quad \forall\, \xi \in R^n. \tag{7}$$

La continuità hölderiana delle soluzioni v di (6) nell'ipotesi (7) può essere provata a partire dalla semplice assunzione della integrabilità di $|Dv|^2$ su Ω. A questo fine osserviamo innanzitutto che da (6) e (7) seguono, per $\gamma = (\tau_2/\tau_1)^2$,

$$\frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)^2}\int_{A(k)\cap B_{\rho_2}(y)} (v(x)-k)^2 dx \geq \int_{A(k)\cap B_{\rho_1}(y)} |Dv(x)|^2 dx \quad , \tag{8}$$

$$\frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)^2}\int_{B_{\rho_2}(y)-A(k)} (v(x)-k)^2 dx \geq \int_{B_{\rho_1}(y)-A(k)} |Dv(x)|^2 dx \quad , \tag{9}$$

per ogni $y \in \Omega$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \mathrm{dist}(y,\partial\Omega)$, $k \in R$, e dove si è posto $A(k) = \{x | v(x) > k\}$, $B_\rho(y) = \{x \,|\, |x-y| < \rho\}$.

Il ruolo delle (8) e (9) è straordinariamente efficace se si tiene conto della diseguaglianza stabilita nel seguente:

LEMMA. Per ogni $n > 1$ esiste $\beta > 0$ tale che se v^2 e $|Dv|^2$ sono integrabili su Ω , se $y \in \Omega$, $0 < \rho < \mathrm{dist}(y,\partial\Omega)$, e $2\mathrm{mis}\left[A(k) \wedge B_\rho(y)\right] \leq \mathrm{mis}\, B_\rho(y)$ allora

$$(10) \qquad \beta \int_{A(k) \wedge B_\rho(y)} |Dv|^2 dx \geq \left\{\mathrm{mis}\left[A(k) \wedge B_\rho(y)\right]\right\}^{-\frac{2}{n}} \int_{A(k) \wedge B_\rho(y)} (v-k)^2 dx \quad .$$

La dimostrazione di questo lemma è fondata su una relazione quantitativa fra una funzione e il suo gradiente, che può essere stabilita ricorrendo a considerazioni di Teoria Geometrica della Misura, e che è:

$$(11) \qquad \frac{\omega_n}{1-2^{-1/n}} \int_{A(k,\rho)-A(\lambda,\rho)} |Dv| dx \geq (\lambda-k)\left[\min(A(\lambda,\rho), B_\rho(y)-A(k,\rho))\right]^{\frac{n-1}{n}}$$

dove $\lambda > k$, $A(k,\rho) = A(k) \wedge B_\rho(y)$ e analogamente $A(\lambda,\rho)$ e dove ω_n è la misura della sfera unitaria di R^n cioè $\omega_n = \mathrm{mis}\left\{x \in R^n \,\middle|\, |x| < 1\right\}$.

Il punto di partenza per la (11) è

$$(12) \qquad \int_{A(t,\rho)} |Dv(x)| dx = \int_t^{\infty} H_{n-1}\{\partial A(s) \cap B_\rho(y)\} ds \quad .$$

Insieme con la (12) ricordiamo infatti che vale, come conseguenza della

proprietà isoperimetrica della sfera,

$$2\omega_n H_{n-1}\left\{B_\rho(y)\cap\partial A(s)\right\} \geq \left\{\mathrm{mis}A(s,\rho)\right\}^{\frac{n-1}{n}} + \left\{\mathrm{mis}\left(B_\rho(y)-A(s,\rho)\right)\right\}^{\frac{n-1}{n}} - (\mathrm{mis}\,B_\rho)^{\frac{n-1}{n}}$$

quindi anche, posto $\mu(s,\rho) = \min(A(s,\rho), B_\rho(y)-A(s,\rho))$

$$2\omega_n H_{n-1}(B_\rho(y)\cap\partial A(s)) \geq 2(\mu(s,\rho))^{\frac{n-1}{n}} - (2\mu(s,\rho))^{\frac{n-1}{n}}$$

da cui segue facilmente (11).

Il passaggio dalla (11) alla (10) è un esercizio di natura tecnica al quale non ritengo qui utile dedicare spazio. Essenziale è invece far vedere quale conseguenza può ricavarsi dalle (8) e (10):

CONSEGUENZA DELLE (8) E (10): $\forall\,\sigma \in (0,1)$, posto

$$\theta = \min\left\{(1-\sigma)^n\omega_n/2, \left[\sigma^2/(1+\gamma+\beta)2^{n+2}\right]^n\right\},\quad c^2 = (\theta\rho^n)^{-1}\int_{A(k,\rho)}(v-k)^2dx\,,$$

vale l'implicazione:

$$\text{(13)}\qquad \mathrm{mis}\,A(k,\rho) < \theta\rho^n \Rightarrow \mathrm{mis}\,A(k+\sigma c, \rho-\sigma\rho) = 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le successioni

$$\rho_h = \rho-\sigma\rho+2^{-h}\sigma\rho\,,\quad k_h = k+\sigma c-2^{-h}\sigma c\,.$$

Dalle (8) e (10) si ricava

$$\beta\gamma\sigma^{-2}\rho^{-2}\, 4^{h+1}\left[\operatorname{mis} A(k_h,\rho_h)\right]^{2/n} \int_{A(k_h,\rho_h)} (v-k_h)^2 dx \geq \int_{A(k_h,\rho_{h+1})} (v-k_h)^2 dx$$

dove l'ultimo integrale è ovviamente maggiore di $\int_{A(k_{h+1},\rho_{h+1})} (v-k_{h+1})^2 dx$ che, a sua volta, è maggiore di

$$4^{-(h+1)}\sigma^2 c^2 \operatorname{mis} A(k_{h+1},\rho_{h+1}) \quad .$$

Avremo perciò

$$\rho^2\sigma^4 c^2 \cdot 2^{-4(h+1)} \operatorname{mis} A(k_{h+1},\rho_{h+1}) \leq \gamma\beta\left[\operatorname{mis} A(k_h,\rho_h)\right]^{\frac{2}{n}} \int_{A(k_h,\rho_h)} (v-k_h)^2 dx$$

Per induzione si hanno allora, per ogni intero h :

$$\operatorname{mis} A(k_h,\rho_h) \leq \theta\rho^n\, 2^{-2nh} \quad ,$$

$$\int_{A(k_h,\rho_h)} (v-k_h)^2 dx \leq \theta\rho^n c^2\, 2^{-2nh} \quad .$$

Dalle quali, ovviamente, segue (13).

Che la (13) sia il passo fondamentale sulla strada della regolarizzazione è evidenziato dal fatto che da essa può facilmente dedursi l'esistenza di $\eta \in (0,1)$ tale che:

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho(y)} v = \sup_{B_\rho(y)} v - \inf_{B_\rho(y)} v \leq (1-\eta) \operatorname*{osc}_{B_{4\rho}(y)} v \quad !$$

B I B L I O G R A F I A

D. HILBERT: Über das Dirichletsche Prinzip; Math. Ann. 59 (1904), 161-186.

A. HAAR: Über das Plateausche Problem; Math. Ann. 97 (1927), 127-158.

E. DE GIORGI: Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari; Mem. Acc. Sci. Torino 3 (1957), 1-19.

CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA (2^a parte)

RISOLUBILITA' DELLA (1) COL DATO CONTINUO

Ritornando alle considerazioni a), b), c) delle pagine 5 e 6, osserviamo che è la validità della sola b) ad essere fortemente dipendente dalla ipotesi che l'equazione sia quella di Laplace. La b) discende infatti immediatamente dall'essere funzione armonica ogni limite uniforme di funzioni armoniche.
L'estensione della validità di questa proprietà ad equazioni più generali del tipo (1) ha un ovvio interesse ai fini di questa nostra trattazione. Perciò riscriviamo la (1) nella forma

$$(1^*) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j F(Du(x)) D_i D_j u(x) = 0 \quad ,$$

e guardiamo ad essa come ad un'equazione lineare del 2^o ordine per la funzione u con coefficienti $a_{ij}(x) = D_i D_j F(Du(x))$, i quali ovviamente soddisfano la condizione di ellitticità (7), se F è di classe $\mathcal{C}^2$ e strettamente convessa. I parametri di ellitticità τ_1, τ_2 dipendono, oltre che dalla F, dal $\sup_x |Du(x)|$.

Volendo allora stabilire proprietà per i limiti di successioni $\{u_h\}$ di soluzioni di (1*) è facilmente intuibile, dopo quanto già esposto a proposito della (6), l'importanza della equilimitatezza dei gradienti,

cioè della condizione

$$\sup_h \sup_x |Du_h(x)| < +\infty \ . \tag{14}$$

L'ipotesi di convergenza uniforme per $\{u_h\}$ implicando

$$\sup_h \sup_x |u_h(x)| < +\infty \ , \tag{15}$$

c'interesseremo di stabilire condizioni sufficienti a garantire la validità dell'implicazione (15) → (14), che chiameremo semplicemente STIMA DEL GRADIENTE.

STIMA DEL GRADIENTE PER L'EQUAZIONE DELLE SUPERFICIE MINIME.

Nel caso particolare dell'equazione delle superficie minime, cioè nel caso $F(p) = \sqrt{1+|p|^2}$, vale, per un'opportuno $c(n) \in R$,

$$|Du(x_o)| \leq \exp\left[c(n)d^{-1} \sup_{|x-x_o|<d} (u(x)-u(x_o))\right] \tag{16}$$

per ogni soluzione u di

$$\operatorname{div} \frac{Du(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}} = 0 \ , \ \forall \ |x-x_o| < d \ . \tag{17}$$

Della dimostrazione di (16) mi limiterò a indicare un passo, che garantisco essere fondamentale, e che è possibile grazie a considerazioni dello stesso tipo di quelle già esposte per la risoluzione del problema

della regolarizzazione. Il passo consiste nella dimostrazione della seguente diseguaglianza: posto $v = (1+|Du|^2)^{-1/2}$, dove u verifica (17), e $\alpha(\rho,t) = H_n\{A_{\rho,t}\}$, dove $A_{\rho,t}$ è la componente connessa contenente $(x_o,u(x_o))$ della porzione di superficie S = graph u verificante le $|x-x_o|^2 + |u(x)-u(x_o)|^2 < \rho^2$, $v(x) < t$, vale

$$\alpha(\rho,t) \geq c(n)\rho^n \left(\frac{t-t_o}{t}\right)^n , \quad \forall\, t \in [t_o,1] \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA (18).

Posto $\nu = (-Du,1)\left(\sqrt{1+|Du|^2}\right)^{-1}$, l'equazione (17) può scriversi nella forma

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\nu_i = 0 , \tag{17*}$$

e quindi anche, con la posizione $\delta_i = D_i - \nu_i \sum_{h=1}^{n+1} \nu_h D_h$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\nu_i = 0 , \tag{19}$$

da cui, applicando δ_h e facendo qualche passaggio elementare, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\delta_i\nu_h + c^2\nu_h = 0 , \quad \text{con} \quad c^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1} (\delta_i\nu_j)^2 . \tag{20}$$

La (20), per $h = n+1$, dà un'equazione per v

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\delta_i v + c^2 v = 0 , \tag{21}$$

da cui, per il fatto di essere $v > 0$, discende

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i v \leq 0 \quad .$$

Da questa diseguaglianza, di notevole interesse perchè l'operatore $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i$ è l'operatore di Laplace sulla superficie S , segue con non grande difficoltà (18). INFATTI:

posto $v_t = t - v$ sulla componente connessa di $\{v < t\} \cap S$ contenente $(x_o, u(x_o))$ e 0 altrove, ed essendo $\phi : R^{n+1} \to R$ di classe C^1 e nulla nei punti distanti da $(x_o, u(x_o))$ più di ρ , moltiplicando la (22) per $\phi^2 v_t$ e integrando su S otteniamo,

$$\Sigma_i \int_{A(\rho,t)} \phi^2 v_t \; \delta_i \delta_i v \, dH_n \leq 0 \Rightarrow \Sigma_i \int_{A(\rho,t)} \left[\phi^2 (\delta_i v)^2 + 2\phi v \delta_i \phi \delta_i v \right] dH_n \leq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_{A(\rho,t)} \Sigma_i (\delta_i (\phi v))^2 dH_n \leq \int_{A(\rho,t)} \Sigma_i v (\delta_i \phi)^2 dH_n \quad .$$

Da questa e da una diseguaglianza del tipo (10) si ha

$$\left\{ \int_{A(\rho,t)} (\phi v)^{\frac{2n}{n-2}} dH_n \right\}^{\frac{n-2}{n}} \leq c(n) \int_{A(\rho,t)} v^2 |\delta\phi|^2 dH_n \quad ;$$

da cui, per ogni $\sigma \in (0,\rho)$, specializzando la scelta di ϕ , ricaviamo

$$\left\{ \int_{A(\rho-\sigma,t)} v^{\frac{2n}{n-2}} dH_n \right\}^{\frac{n-2}{n}} \leq c(n) \, \frac{t^2}{\sigma^2} \, \alpha(\rho,t) \quad .$$

Finalmente, per $\mu < t$,

$$\text{(23)} \qquad \mu^2 \alpha(\rho-\sigma, t-\mu)^{\frac{n-2}{n}} \leq c(n) \frac{t^2}{\sigma^2} \alpha(\rho, t) \quad .$$

Posto $b_k = \alpha\left(\rho-\rho/2 \cdot \sum_{i=1}^{k} 2^{-i},\ t - \frac{t-t_o}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} 2^{-i}\right)$ abbiamo, dalla (23),

$$b_{k+1}^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{c}{\rho^2}^{1+\frac{n}{n-2}+\left(\frac{n}{n-2}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{n-2}\right)^k} . 4^{k+(k-1)\frac{n}{n-2}+(k-2)\left(\frac{n}{n-2}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{n-2}\right)^{k-1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{t+t_o}{2}+\frac{t-t_o}{2^k}\right)^2 \left(\frac{t+t_o}{2}+\frac{t-t_o}{2^{k-1}}\right)^{2\frac{n}{n-2}} \left(\frac{t+t_o}{2}+\frac{t-t_o}{2^{k-2}}\right)^{2\left(\frac{n}{n-2}\right)^2} \cdot \dots \left[\tilde{C}\rho^n\left(\frac{t-t_o}{t}\right)^n\right]^{\left(\frac{n}{n-2}\right)^{k-1}}$$

Se questa vale per $\tilde{C}$ abbastanza piccolo si ha $b_k \underset{k}{\to} 0$, che è assurdo.
Ne ricaviamo che per tale $\tilde{C}$ deve essere vera la (18)!

B I B L I O G R A F I A

E. BOMBIERI - E. DE GIORGI - M. MIRANDA: Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche, Arch. for Rat. Mech. and Anal. 32 (1969), 255-267.

E. TOMAINI: Singolarità delle ipersuperfici minimali e problema di Bernstein, Tesi di Laurea in Matematica, Univ. di Ferrara, A.A. 1980-81.